Φυλλάδιο 2 (Απειροστικός λογισμός ΙΙ)

1. Δίνονται $f, g : A \to R$ ομοιόμορφα συνεχείς. Δείξτε ότι το άθροισμα $f+g$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A. Αποδείξτε επίσης ότι το γινόμενο fg είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A, όταν f, g φραγμένες συναρτήσεις. Είναι η τελευταία υπόθεση απαραίτητη ώστε η fg να είναι ομοιόμορφα συνεχής ?
2. Δείξτε ότι αν $f : A \to B$ και $g : B \to R$ ομοιόμορφα συνεχείς συναρτήσεις τότε η σύνθεση $g \circ f : A \to R$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.
3. Εξετάστε ως προς την ομοιόμορφη συνέχεια τις παρακάτω συναρτήσεις

   α) $f(x) = x^p$, $x > 0$ ($p > 0$)

   β) $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x}$, $x \in (0,1)$

   γ) $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$, $x \in (0,2)$

   δ) $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$, $x \in (0,1)$.

   ε) $f(x) = e^x$, $x \in R$

   στ) $f(x) = e^x$, $x \in (-\infty, 3]$

   ζ) $f(x) = \sin\sqrt{x}$, $x \geq 0$

   η) $f(x) = \cos(x^2)$, $x \in R$.
4. Δείξτε ότι αν η $f : (0,1) \to R$ είναι ομοιόμορφα συνεχής τότε είναι φραγμένη. Δείξτε επίσης ότι υπάρχει συνεχής και φραγμένη συνάρτηση $f : (0,1) \to R$ η οποία δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.
5. Δίνεται $f : R \to R$ συνεχής ώστε $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$. Δείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο R.
6. Δίνεται $f : [2,+\infty) \to R$ συνεχής ώστε να υπάρχει το όριο $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. Δείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[2,+\infty)$.
7. Δείξτε ότι αν η συνάρτηση $f : R \to R$ είναι ομοιόμορφα συνεχής, και υπάρχει $c > 0$ ώστε $f(x) \geq c$, για κάθε $x \in R$, τότε η συνάρτηση $1/f$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο R. Δείξτε ότι η ύπαρξη της σταθεράς c με την συγκεκριμένη ιδιότητα είναι απαραίτητη για να έχουμε το ζητούμενο συμπέρασμα.
8. Εξετάστε ως προς την ομοιόμορφη συνέχεια τις παρακάτω συναρτήσεις

   α) $f(x) = \ln x$, $x > 0$.

   β) $f(x) = \ln x$, $x \geq 1$

   γ) $f(x) = 1/x^a$, $x \geq 1$, $a > 0$

   δ) $f(x) = 1/x^a$, $x > 0$, $a > 0$

   ε) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$, $x > 0$.